

Il paracadute magnetico

Un piccolo magnete permanente di massa – viene lasciato cadere liberamente in un tubo verticale e fisso, di materiale isolante come il plexiglas; si osserva che esso cade con la stessa accelerazione – con cui cadrebbe nel vuoto.

Se lo stesso magnete viene lasciato cadere in un tubo di rame di identiche dimensioni, si osserva che la velocità acquistata è inferiore a quella di caduta libera: il magnete si muove molto più lentamente, come se fosse sostenuto da un invisibile paracadute, come illustrato in Fig. 1 per due magneti lasciati cadere nello stesso istante dall'estremo superiore dei due tubi.

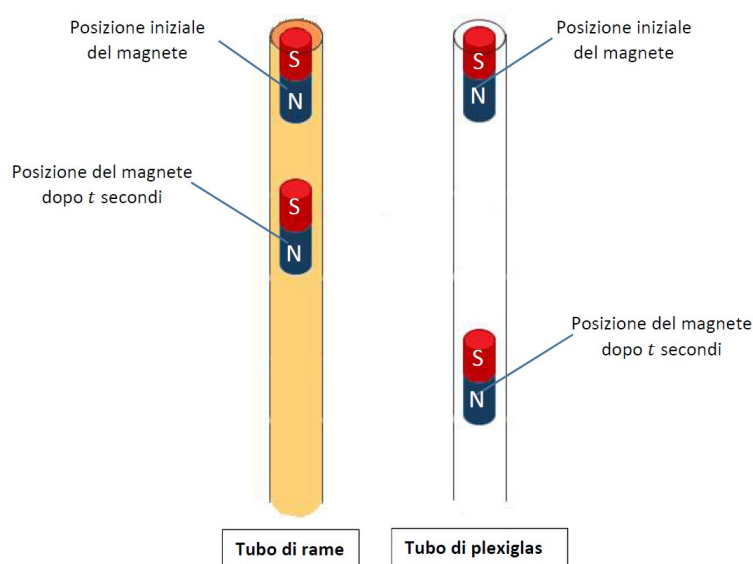


Figura 1

Infatti sul magnete in aggiunta alla forza peso agisce una forza diretta in verso opposto al moto che dipende dalla sua velocità.

Per capire quello che sta succedendo supponi, a un dato istante, di sostituire il tubo metallico con un tubo di plexiglas e di porre due spire conduttrici chiuse di resistenza elettrica R pari a $1,0 \times 10^{-3} \Omega$, una sopra e l'altra sotto il magnete come illustrato in Fig. 2.

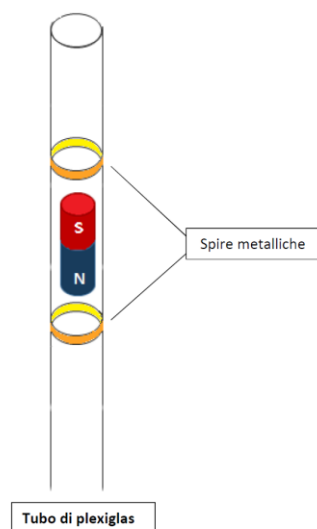


Figura 2

1. Mostra che anche in questo caso il moto del magnete è influenzato da una forza di resistenza passiva come quando cade nel tubo di rame. Spiega qualitativamente l'origine della forza di resistenza passiva e giustifica perché essa dipende dalla velocità. Individua e illustra con un disegno il verso delle correnti indotte nelle spire, spiegando inoltre come variano nel tempo a causa del moto del magnete. Discuti i cambiamenti che si producono se il magnete viene capovolto, in modo che il polo Nord e il polo Sud risultino scambiati.

In laboratorio, studi la velocità di caduta di un magnete di massa $m = (2,35 \pm 0,01)g$ nel tubo di rame misurando con un cronometro il tempo di caduta da diverse altezze.

I dati sperimentali sono riportati nella tabella 1, nella quale h è l'altezza di caduta e Δt il tempo di caduta. L'incertezza sui valori delle distanze è di $0,1\text{ cm}$ e sui valori dei tempi dell'ordine di $0,1\text{ s}$.

$h\text{ [cm]}$	$\Delta t\text{ [s]}$
80,0	5,7
70,0	5,0
60,0	4,3
50,0	3,6
40,0	2,9
30,0	2,2
20,0	1,5
10,0	0,9
5,0	0,5

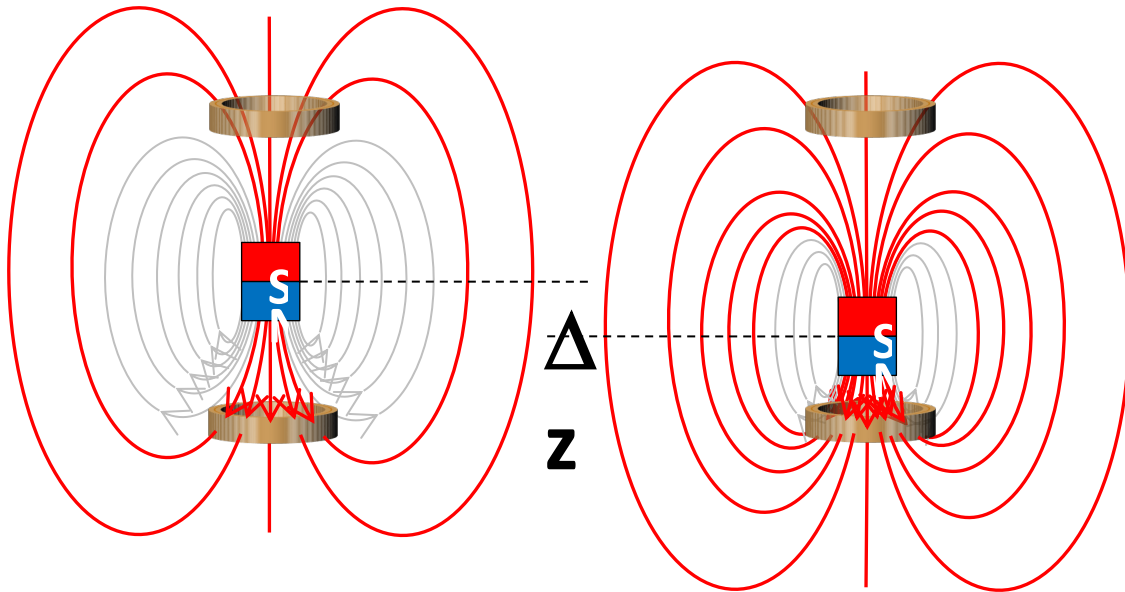
Tabella 1

2. Deduci, dai dati riportati in tabella 1, i valori delle velocità medie di caduta dalle diverse altezze. Adoperando tali valori costruisci un grafico della velocità media in funzione dell'altezza, discutine qualitativamente l'andamento e determina il valore limite della velocità. Assumendo che la forza di resistenza passiva F_r possa essere approssimata con una forza proporzionale alla velocità v , cioè $F_r = -kv$. Considerando la forza totale agente sul magnete, illustra perché durante il moto la sua velocità aumenta fino a raggiungere una velocità limite. Determina infine il valore numerico di k , utilizzando il valore della velocità limite trovata dal grafico.
3. Discuti il bilancio energetico della situazione problematica proposta, sia nella fase di accelerazione sia quando il magnete raggiunge la velocità limite. Calcola al termine della caduta quanta energia meccanica è stata trasformata in altre forme di energia, specificando in quali forme.
4. Considera ora la situazione semplificata proposta precedentemente al punto 1 in cui il tubo di rame viene sostituito da un tubo di plexiglas e da due spire conduttrici di resistenza elettrica R pari a $1,0 \times 10^{-3} \Omega$.
A partire da considerazioni sulla potenza dissipata determina il valore della corrente che circolerebbe nelle spire se il magnete raggiungesse la stessa velocità limite che raggiunge nel tubo di rame e se la corrente fosse la stessa in entrambe le spire. Utilizza questo valore per determinare la variazione di flusso del campo magnetico nell'unità di tempo che il moto del magnete indurrebbe sulle spire.
Spiega inoltre perché se il tubo di rame (resistività $\rho = 1,68 \times 10^{-8} \Omega m$) viene sostituito con un tubo di alluminio (resistività $\rho = 2,75 \times 10^{-8} \Omega m$), il magnete raggiunge una velocità limite maggiore.

Soluzione Problema 1

Punto 1

Consideriamo il magnete che cade muovendosi tra le due spire. In un dato intervallo di tempo Δt , il magnete percorre una distanza Δz , avvicinandosi alla spira posta in basso e allontanandosi dalla spira posta in alto. Dalle due figure che seguono si osserva che nell'intervallo Δt il numero di linee di campo concatenate con la spira inferiore va aumentando e quello delle linee concatenate con la spira superiore va diminuendo. In termini di flusso del campo magnetico concatenato con le spire, possiamo affermare che la caduta del magnete determina un aumento del flusso concatenato con la spira inferiore e una diminuzione del flusso concatenato con la spira superiore.



Queste variazioni del flusso concatenato inducono nelle due spire una f.e.m. il cui valore medio è dato dalla legge di Faraday – Neumann - Lenz

$$f.e.m. = - \frac{\Delta\phi(B)}{\Delta t}$$

Nelle due spire circola una corrente media

$$i = \frac{f.e.m.}{R} = - \frac{1}{R} \frac{\Delta\phi(B)}{\Delta t}$$

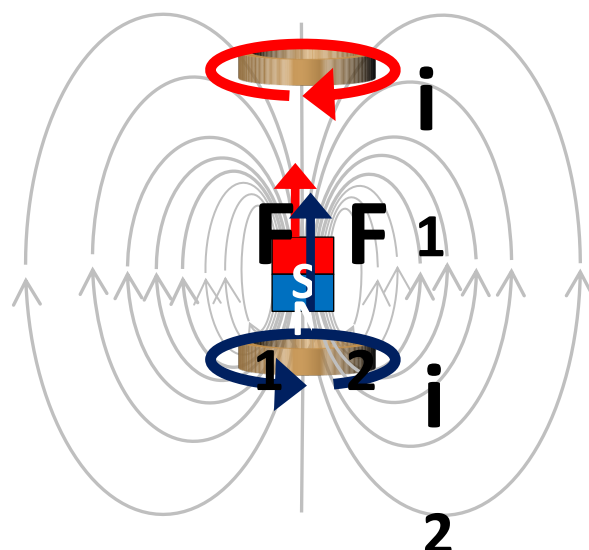
Se $\Delta\Phi(B)$ è la variazione di flusso corrispondente allo spostamento Δz del magnete, l'intensità della corrente indotta è tanto più grande quanto minore è l'intervallo Δt in cui avviene lo spostamento. In altri termini, l'intensità della corrente indotta aumenta con l'aumentare della velocità del magnete.

Il segno negativo deriva dalla legge di Lenz per la quale il verso della corrente indotta è tale da opporsi alla variazione del flusso.

Poiché il flusso concatenato con la spira superiore sta diminuendo, il campo magnetico prodotto dalla corrente che vi circola deve essere concorde con quello del magnete. Perché questo avvenga il verso della corrente i_1 deve essere quello mostrato in figura.

Il campo magnetico prodotto dalla corrente i_1 esercita sul magnete una forza F_1 attrattiva. L'intensità di questa forza aumenta con l'aumentare della corrente nella spira e questa, a sua volta, aumenta con la velocità del magnete. In definitiva la forza attrattiva che la spira superiore esercita sul magnete aumenta con l'aumentare della velocità del magnete.

Ragionamento analogo può essere fatto per spiegare l'interazione tra la corrente nella spira inferiore e il magnete.



Poiché il flusso concatenato con la spira inferiore sta aumentando, il campo magnetico prodotto dalla corrente che vi circola deve essere discorde rispetto a quello del magnete. Perché questo avvenga il verso della corrente i_2 deve essere quello mostrato in figura.

Il campo magnetico prodotto dalla corrente i_2 esercita sul magnete una forza F_2 repulsiva. L'intensità di questa forza aumenta con l'aumentare della corrente nella spira e questa, a sua volta, aumenta con la velocità del magnete.

Il risultato finale dell'interazione tra le correnti nelle due spire e il magnete è quello di produrre una forza resistente che si oppone al moto del magnete e la cui intensità aumenta all'aumentare della velocità del magnete.

Per descrivere l'andamento delle correnti nelle due spire, riferiamoci alla prima figura. Quando il magnete si sposta di un tratto Δz , diminuisce il flusso concatenato con la spira superiore e aumenta quello concatenato con la spira inferiore. Queste variazioni di flusso non sono simmetriche, l'aumento di flusso concatenato con la spira inferiore è maggiore della diminuzione di flusso concatenato con la spira superiore. Ne segue che l'intensità della corrente indotta nella spira inferiore è maggiore di quella indotta nella spira superiore. Lo stesso accade con i successivi spostamenti del magnete. Si può concludere che durante lo spostamento del magnete dalla spira superiore a quella inferiore, le correnti nelle due spire vanno rispettivamente diminuendo e aumentando.

Punto 2

I valori della velocità media di caduta del magnete dalle diverse altezze si deducono dalla relazione

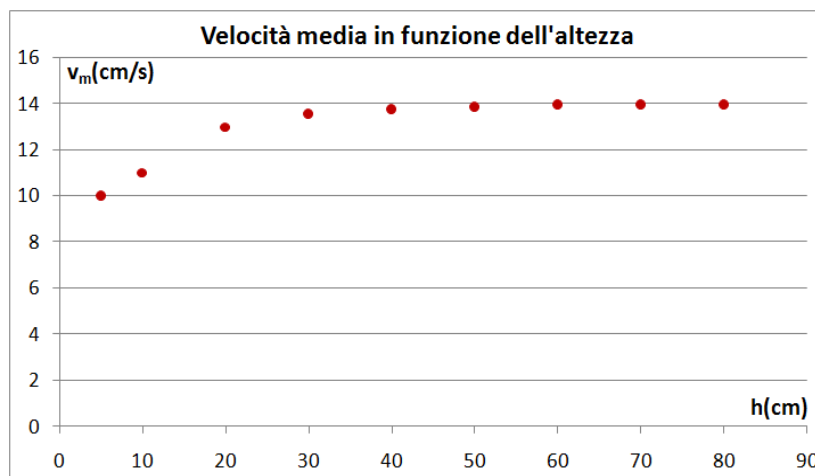
$$v_m = \frac{h}{\Delta t}$$

I valori della velocità media sono riportati nella tabella seguente.

h [cm]	Δt [s]	v_m [cm/s]
80,0	5,7	14,0
70,0	5,0	14,0
60,0	4,3	14,0
50,0	3,6	13,9
40,0	2,9	13,8
30,0	2,2	13,6
20,0	1,5	13

10,0	0,9	11
5,0	0,5	10

Nel grafico seguente è stata riportata la velocità media in funzione dell'altezza di caduta del magnete.



Il grafico precedente mostra una fase iniziale durante la quale gli incrementi della velocità media vanno via via diminuendo con il diminuire dell'altezza. Dall'altezza di circa 60 cm gli incrementi praticamente si annullano e la velocità media tende ad un valore limite di 14,0 cm/s.

Come discusso nel punto precedente, sul magnete in caduta agisce una forza resistente. L'intensità di questa forza aumenta all'aumentare della velocità del magnete finché diventa uguale al peso del magnete. A questo punto la forza totale sul magnete è nulla, l'accelerazione si annulla e il magnete continua a cadere a velocità costante.

Se si assume che la forza resistente possa essere approssimata con una forza proporzionale alla velocità, $F_r = -kv$, detta F_p la forza peso agente sul magnete, la forza totale agente sul magnete deve essere nulla una volta raggiunta la velocità limite, da cui:

$$F_{tot} = F_p + F_r = 0$$

$$mg - kv_{lim} = 0$$

$$k = \frac{mg}{v_{lim}} = \frac{2,35 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{1,40 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}} = 0,165 \text{ kg/s}$$

Punto 3

Durante la caduta del magnete, questo perde energia potenziale. Nella fase iniziale della caduta, in presenza di accelerazione, l'energia potenziale persa dal magnete si trasforma nelle seguenti forme di energia:

Energia cinetica del magnete;

energia dissipata per attrito con l'aria;

calore dissipato per effetto Joule dalla corrente indotta nel tubo;

energia immagazzinata nel campo magnetico prodotto dalla corrente indotta nel tubo con densità:

$$w_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

L'energia immagazzinata nel campo magnetico viene sottratta al magnete quando il modulo della corrente indotta aumenta e con essa aumenta il campo B. Quando il modulo della corrente diminuisce, questa energia viene restituita trasformandosi in calore dissipato nel tubo per effetto Joule.

Durante la fase in cui la velocità del magnete si mantiene costante non c'è variazione di energia cinetica e la perdita di energia potenziale del magnete si trasforma in tutte le precedenti forme di energia tranne che in energia cinetica.

Al termine della caduta, tutta l'energia meccanica persa dal magnete si sarà trasformata in calore dissipato nel tubo per effetto Joule e in calore dissipato per attrito con l'aria.

Possiamo calcolare questa energia come differenza tra l'energia meccanica che il magnete possiede al termine della caduta e quella posseduta all'inizio della caduta.

$$|\Delta E| = mgh - \frac{1}{2}mv_{lim}^2 = 1,84 \cdot 10^{-2} J$$

Punto 4

Consideriamo la situazione in cui il magnete si sposta a velocità costante pari alla velocità limite. Se consideriamo trascurabile la quantità di energia che si trasforma in calore per attrito con l'aria e quella che viene immagazzinata nel campo magnetico, tutta l'energia meccanica persa dal magnete quando si sposta di un tratto dz in un tempo dt , viene dissipata nelle due spire per effetto Joule. Se i è la corrente che scorre in entrambe le spire si ha:

$$2Ri^2 dt = mg dz$$

$$i^2 = \frac{mg}{2R} \frac{dz}{dt} = \frac{mg}{2R} v$$

Se v è la velocità limite avremo:

$$i = \sqrt{\frac{mgv_{lim}}{2R}} = 1,3 A$$

La variazione del flusso del campo magnetico per unità di tempo:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = f.e.m. = Ri = 1,3 \cdot 10^{-3} V$$

Se il magnete cade in un tubo di alluminio che ha la stessa geometria del tubo di rame, a parità di velocità del magnete, la corrente indotta ha un'intensità minore rispetto a quella nel tubo di rame. Questo accade a causa della maggiore resistività dell'alluminio rispetto al rame.

Una corrente di minore intensità produce un campo magnetico meno intenso e quindi una forza resistente meno intensa.

Quando il magnete, cadendo nel tubo di alluminio, raggiunge la velocità che nel tubo di rame è quella limite, possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$v_{All} = v_{lim_{Rame}} \Rightarrow i_{All} < i_{Rame} \Rightarrow F_{r_{All}} < F_{r_{Rame}} = F_p$$

Da cui:

$$F_{r_{All}} < F_p$$

Questo significa che quando la velocità del magnete nel tubo di alluminio raggiunge lo stesso valore della velocità limite nel rame, la forza resistente è minore della forza peso. Poiché non è stata ancora raggiunta la situazione di equilibrio delle forze, il magnete sta ancora accelerando, la sua velocità aumenta e con essa la forza resistente. Quando viene raggiunto l'equilibrio tra forza resistente e forza peso, la velocità del magnete è maggiore rispetto alla velocità limite che il magnete raggiunge nel tubo di rame.